МАТЕМАТИКА
(профильный уровень)

Маркова
Светлана
Иосифовна

04/2023

Оформление заданий с развернутым ответом

Задание 12

$$\cos 2x + 2 = \sqrt{3}\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \qquad \left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$$

Решение.

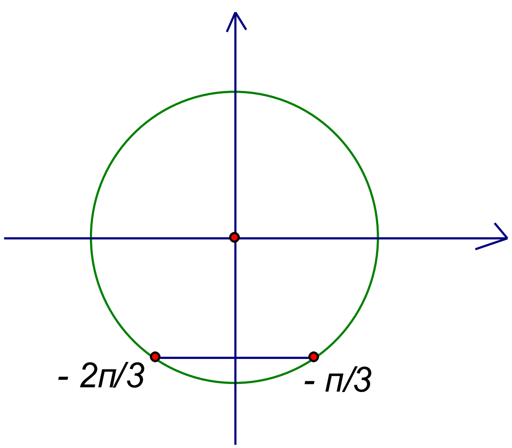
а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$1 - 2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x + 2 = 0;\ \left(2\sin x + \sqrt{3}\right)\left(\sin x - \sqrt{3}\right) = 0.$$

Значит, $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, или $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

Уравнение $\sin x = \sqrt{3}$ корней не имеет.

$$x = (-1)^n\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \pi n, n \in Z$$



$$\cos 2x + 2 = \sqrt{3}\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$$

$$\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$$

Отбор корней с помощью числовой окружности

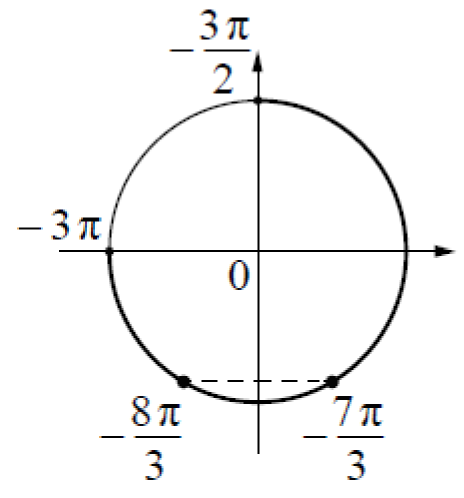
$$-\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z};\ -\frac{2\pi}{3} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Получим числа: $-\frac{8\pi}{3}$; $-\frac{7\pi}{3}$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z};\ -\frac{2\pi}{3} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$;

б) $-\frac{8\pi}{3}$; $-\frac{7\pi}{3}$.



$$\cos 2x + 2 = \sqrt{3}\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \qquad \left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$$

Отбор корней с помощью решения двойных неравенств

$$-\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z};\ -\frac{2\pi}{3} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$$

$$-3\pi \le -\frac{\pi}{3} + 2\pi n \le -\frac{3\pi}{2}$$

$$-18 \le -2 + 12n \le -9$$

$$-\frac{16}{12} \le n \le -\frac{7}{12}$$

$$n = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot (-1) = -\frac{7\pi}{3}$$

$$-3\pi \le -\frac{2\pi}{3} + 2\pi m \le -\frac{3\pi}{2}$$

$$-18 \le -4 + 12m \le -\frac{3\pi}{2}$$

$$-\frac{14}{12} \le m \le -\frac{5}{12}$$

$$m = -1 \Rightarrow x = -\frac{8\pi}{3}$$

$$\cos 2x + 2 = \sqrt{3}\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \qquad \left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$$

Отбор корней методом перебора

$$-\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z};\ -\frac{2\pi}{3} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$$

$$n = 0 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot 0 = -\frac{\pi}{3} \notin \left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$$

$$n = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot (-1) = -\frac{7\pi}{3} \in \left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$$

$$n = -2 \Rightarrow x = -\frac{13\pi}{3} \notin \left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$$

$$m = 0 \Rightarrow x = -\frac{2\pi}{3} \notin \left[-3\pi; -\frac{2\pi}{3}\right]$$

$$m = -1 \Rightarrow x = -\frac{8\pi}{3} \in \left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$$

$$m = -2 \Rightarrow x \ldots \notin [\ldots]$$

Задание 14

Решите неравенство

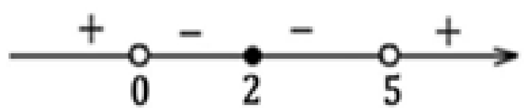
$$\frac{\log_2(32x)-1}{\log_2^2 x-\log_2 x^5}\geq -1.$$

Решение.

Сделаем замену $t=\log_2 x$. Получим неравенство

$$\frac{t+5-1}{t^2-5t}\geq -1 \Leftrightarrow \frac{t+4}{t^2-5t}+1\geq 0 \Leftrightarrow \frac{t^2-4t+4}{t^2-5t}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{(t-2)^2}{t(t-5)}\geq 0.$$

Решаем это неравенство методом интервалов.



$t\in(-\infty;0)\cup\{2\}\cup(5;+\infty)$.

Таким образом, либо $\log_2 x<0 \Leftrightarrow 0<x<1$. Либо $\log_2 x=2 \Leftrightarrow x=4$. Либо $\log_2 x>5 \Leftrightarrow x>32$. Пересекая с ОДЗ, получаем ответ.

ОДЗ:

$$\begin{cases}x>0\\ \log_2^2 x-\log_2 x^5\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x>0\\ \log_2 x(\log_2 x-5)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x>0\\ \log_2 x\neq 0\\ \log_2 x\neq 5\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x>0\\ x\neq 1\\ x\neq 32\end{cases}$$

Ответ: $x\in(0;1)\cup\{4\}\cup(32;+\infty)$.

Задание 14

Решите неравенство

$$2\log_2(x\sqrt{5})-\log_2\left(\frac{x}{1-x}\right)\le\log_2\left(5x^2+\frac{1}{x}-2\right).$$

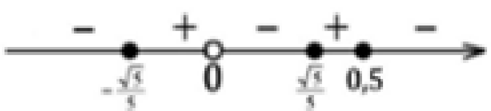
Решение.

Преобразуем неравенство с учетом условия $x\in(0;1)$ (так как $\frac{x}{1-x}>0$):

$$\log_2\left(\frac{(x\sqrt{5})^2(1-x)}{x}\right)\le\log_2\left(\frac{5x^3-2x+1}{x}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{5x^2-5x^3}{x}\le\frac{5x^3-2x+1}{x}\\ x\sqrt{5}>0\\ \frac{x}{1-x}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{5x^2-5x^3-5x^3+2x-1}{x}\le 0\\ x\in(0;+\infty)\\ x\in(0;1)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{5x^2-10x^3+2x-1}{x}\le 0\\ x\in(0;+\infty)\\ x\in(0;1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{5x^2(1-2x)-(1-2x)}{x}\le 0\\ x\in(0;+\infty)\\ x\in(0;1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{(1-2x)(5x^2-1)}{x}\le 0\\ x\in(0;+\infty)\\ x\in(0;1)\end{cases}.$$

Решаем первое неравенство системы методом интервалов. Нули числителя $x=0{,}5, x=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$. Расставим знаки



Получаем $x\in\left(-\infty;-\frac{\sqrt{5}}{5}\right]\cup\left(0;\frac{\sqrt{5}}{5}\right]\cup[0{,}5;+\infty)$. Пересекаем теперь со вторым и третьим условиями системы и получаем ответ.

Ответ: $x\in\left(0;\frac{\sqrt{5}}{5}\right]\cup[0{,}5;1)$.

Задание 15

15-го января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на *r* процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где *r* — целое число;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	1	2	3	4	5	6	7
Долг (млн. руб.)	1	0,6	0,4	0,3	0,2	0,1	0

Найдите наибольшее значение r , при котором общая сумма выплат будет меньше 1,2 млн рублей.

Задание 15

A = 1 млн.руб. - кредит на 6 месяцев

$k = 1 + \frac{r}{100}$ - повышающий коэффициент

Месяц	Долг на конец месяца	Начисление процентов	Выплаты
1	1	k	k – 0,6
2	0,6	0,6k	0,6k – 0,4
3	0,4	0,4k	0,4k – 0,3
4	0,3	0,3k	0,3k – 0,2
5	0,2	0,2k	0,2k – 0,1
6	0,1	0,1k	0,1k
	0		Σ – сумма выплат

$$\Sigma = k(1+0{,}6+0{,}4+0{,}3+0{,}2+0{,}1)-(0{,}6+0{,}4+0{,}3+0{,}2+0{,}1) = 2{,}6k - 1{,}6$$

По условию: $2{,}6k - 1{,}6 < 1{,}2$

$$k < 1\frac{1}{13}$$

$$1 + \frac{r}{100} < 1\frac{1}{13}$$

$$r < \frac{100}{13}$$

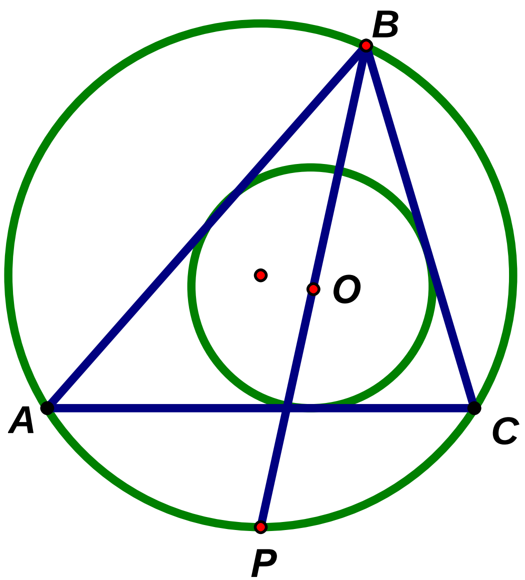
Т.к. r – наибольшее целое число, то $r = 7\%$.

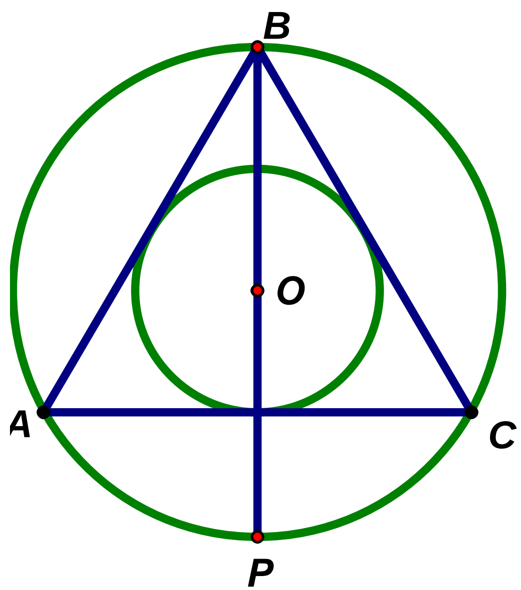
Задание 16

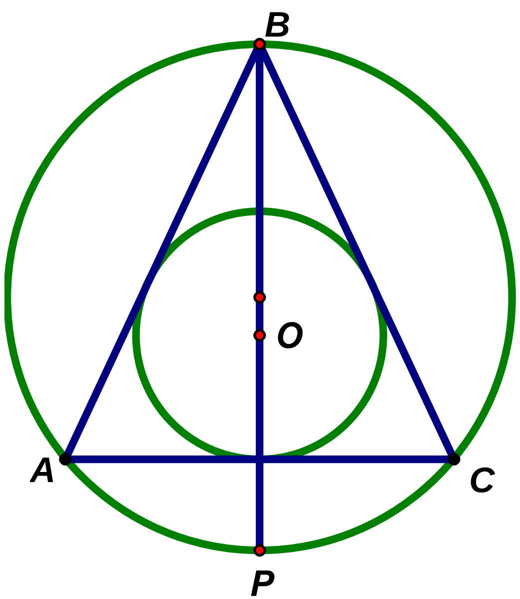
Точка O — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Прямая BO вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке P.

а) Докажите, что $\angle POC = \angle PCO$.

б) Найдите площадь треугольника APC, если радиус описанной около треугольника ABC окружности равен 8, $\angle ABC = 60°$.





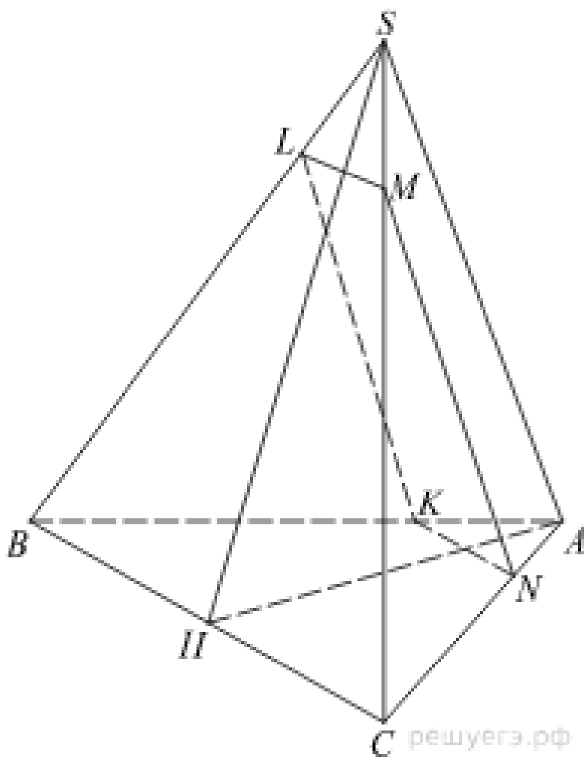


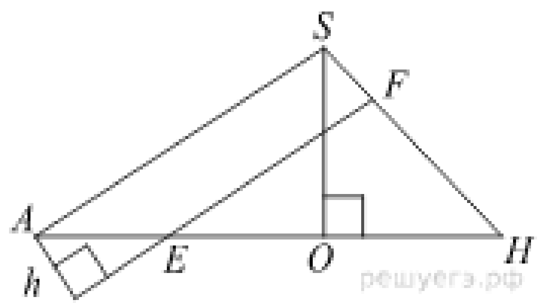
Задание 13

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания $AB = 5$, а боковое ребро $SA = 3$. На рёбрах AB и SC отмечены точки K и M соответственно, причём $AK : KB = SM : MC = 1 : 4$. Плоскость α содержит прямую KM и параллельна SA.

а) Докажите, что плоскость α делит ребро AC в отношении 1:4, считая от вершины A.

б) Найдите расстояние между прямыми SA и KM.





Задание 18

В ящике лежит 58 овощей, масса каждого из которых выражается целым числом граммов. В ящике есть хотя бы два овоща различной массы, а средняя масса всех овощей равна 1000 г. Средняя масса овощей, масса каждого из которых меньше 1000 г, равна 976 г. Средняя масса овощей, масса каждого из которых больше 1000 г, равна 1036 г.

а) Могло ли в ящике оказаться поровну овощей массой меньше 1000 г и овощей массой больше 1000 г?

б) Могло ли в ящике оказаться ровно 12 овощей, масса каждого из которых равна 1000 г?

в) Какую наименьшую массу может иметь овощ в этом ящике?